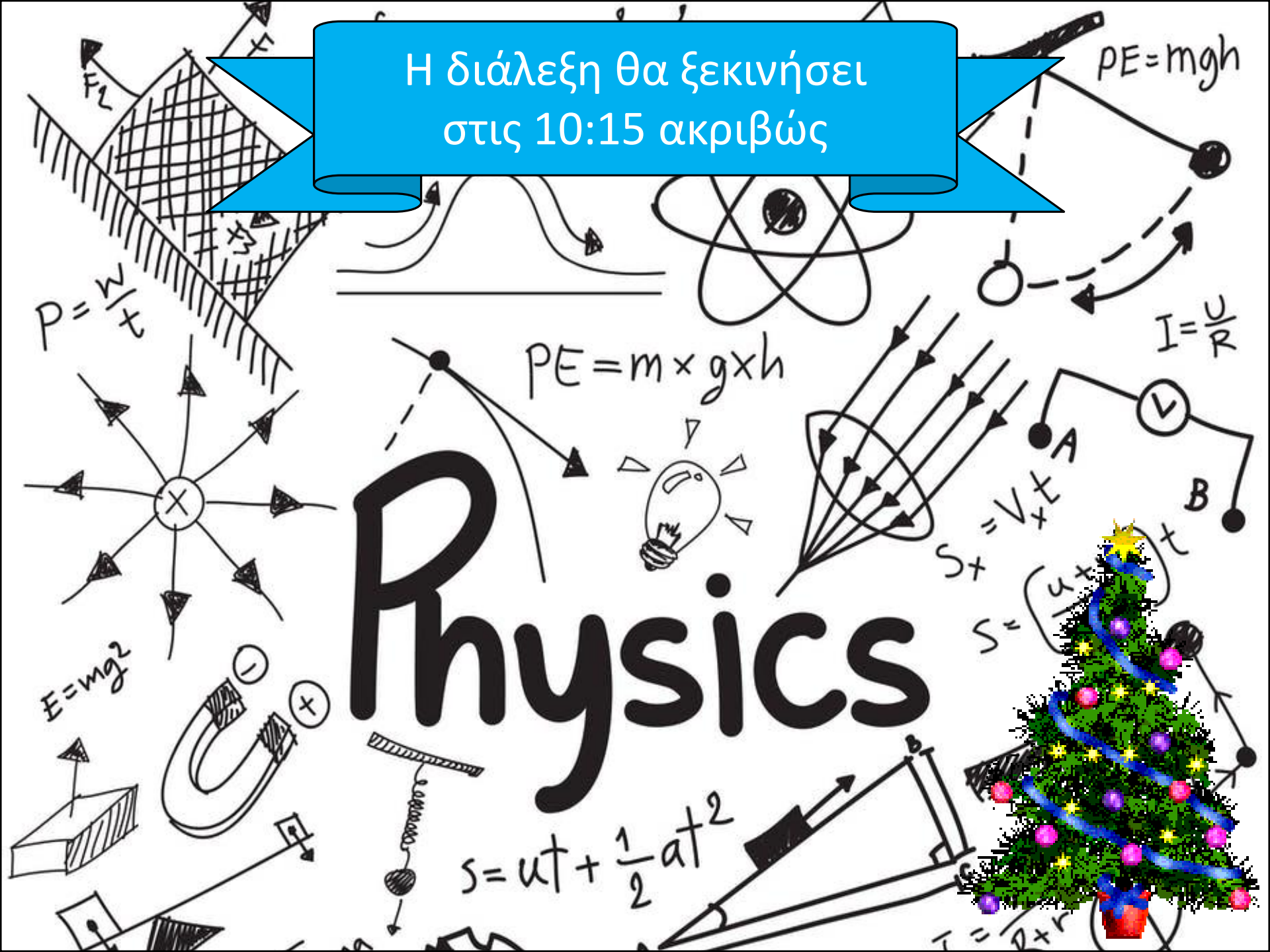
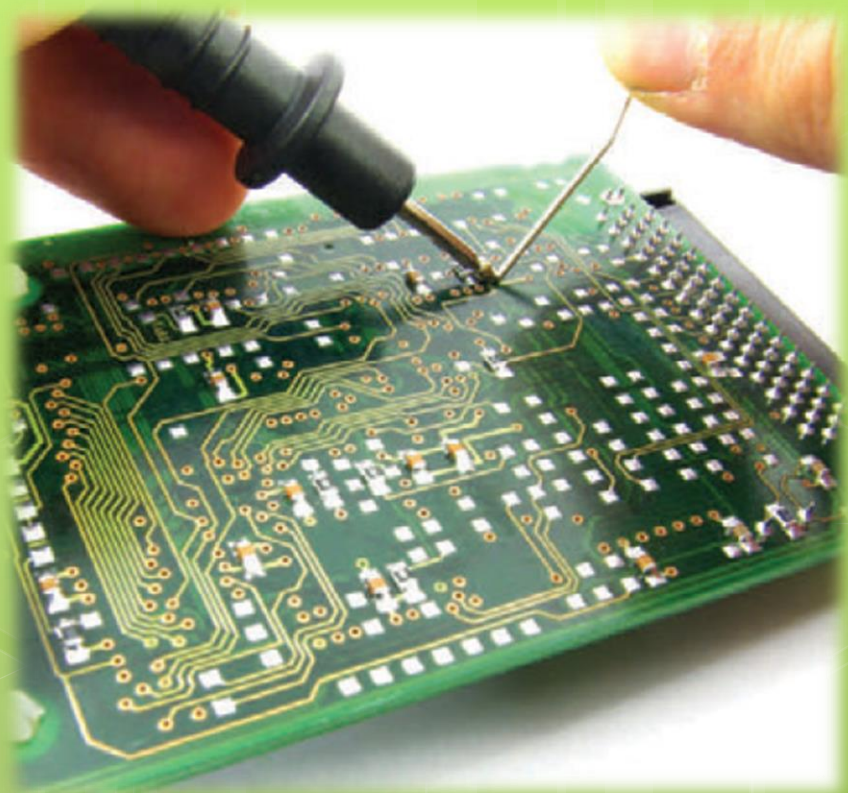


Η διάλεξη θα ξεκινήσει
στις 10:15 ακριβώς

Physics

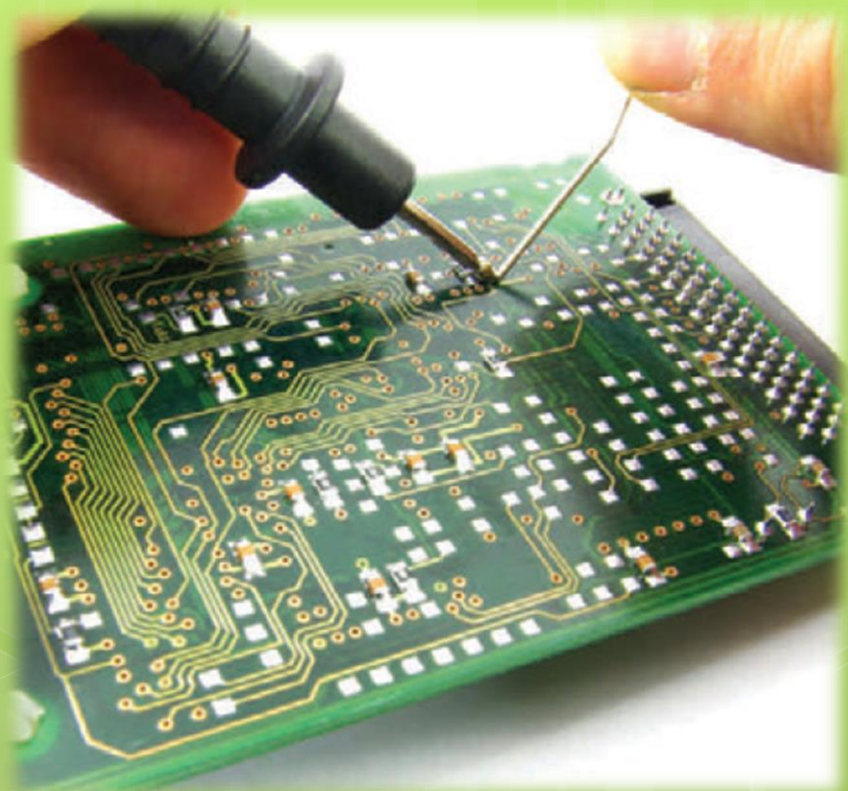




Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος



Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

◉ Εισαγωγή

- ◉ Τα κυκλώματα που θα δούμε περιέχουν τους δομικούς λίθους που συζητήσαμε ως τώρα
 - ◉ Αντιστάσεις, πυκνωτές, και πηγές διαφοράς δυναμικού (μπαταρίες)
- ◉ Στην προσπάθεια ανάλυσής τους θα μάθουμε για τους ***Κανόνες του Kirchhoff***
 - ◉ Προέρχονται από την ***αρχή διατήρησης της ενέργειας*** και την ***αρχή διατήρησης του φορτίου***
- ◉ Το ρεύμα που θα διαρρέει τα κυκλώματά μας θα είναι (αρχικά) σταθερό σε μέτρο και κατεύθυνση
- ◉ Ας μιλήσουμε αρχικά για τον «πάροχο της ενέργειας»
 - ◉ Την «μπαταρία»



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

◉ Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

- ◉ Η διαφορά δυναμικού στους πόλους μιας μπαταρίας είναι σταθερή για ένα δεδομένο κύκλωμα, το ρεύμα είναι επίσης σταθερό σε μέτρο και κατεύθυνση, και λέγεται **συνεχές ρεύμα**
- ◉ Στην πραγματικότητα, η μπαταρία έχει διάρκεια ζωής
 - ◉ Ξεκινά δίνοντας διαφορά δυναμικού ΔV , η οποία φθίνει με την πάροδο του χρόνου
- ◉ Η μπαταρία καλείται είτε **πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης** είτε **πηγή ΗΕΔ**
- ◉ Η **ΗΕΔ $\mathcal{E}$** μιας μπαταρίας είναι η **μέγιστη δυνατή τάση (ΔV)** που μπορεί να δώσει ανάμεσα στους πόλους της
- ◉ Σε όλη μας τη συζήτηση θα υποθέσουμε ότι:
 - α) τα καλώδια **δεν** έχουν αντίσταση
 - β) ο **θετικός** πόλος της μπαταρίας είναι **υψηλότερου δυναμικού** από τον **αρνητικό**
 - γ) το ρεύμα κινείται από τον **αρνητικό** πόλο προς το **θετικό** πόλο της μπαταρίας

Ηλεκτρικά Κυκλώματα



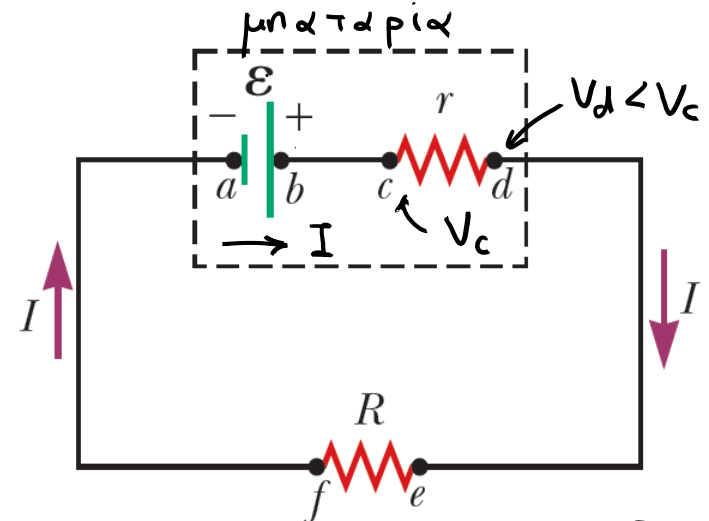
● Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

- Η μπαταρία έχει κι αυτή τη δική της αντίσταση
 - Την ονομάζουμε **εσωτερική αντίσταση r**
 - Αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου
- Ιδανικά, η διαφορά δυναμικού στα άκρα της μπαταρίας ισούται με την ΗΕΔ
- Στην πράξη όμως, δεν ισχύει. Γιατί;

- Το σχήμα δείχνει ένα μοντέλο μπαταρίας (κουτί διακ/μένων)
- Ιδανική ΗΕΔ και αντίσταση r σε σειρά:

$$V_{a \rightarrow d} = V_d - V_a = \underbrace{(V_d - V_c)}_{-Ir} + \underbrace{(V_c - V_b)}_0 + \underbrace{(V_b - V_a)}_{\varepsilon} = -Ir + 0 + \varepsilon = \varepsilon - Ir$$

$$r = \frac{\Delta V}{I} \Rightarrow \Rightarrow \Delta V = -Ir$$





Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

- Το σχήμα δείχνει ότι η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης R είναι

$$V_e - V_f = \Delta V = IR$$

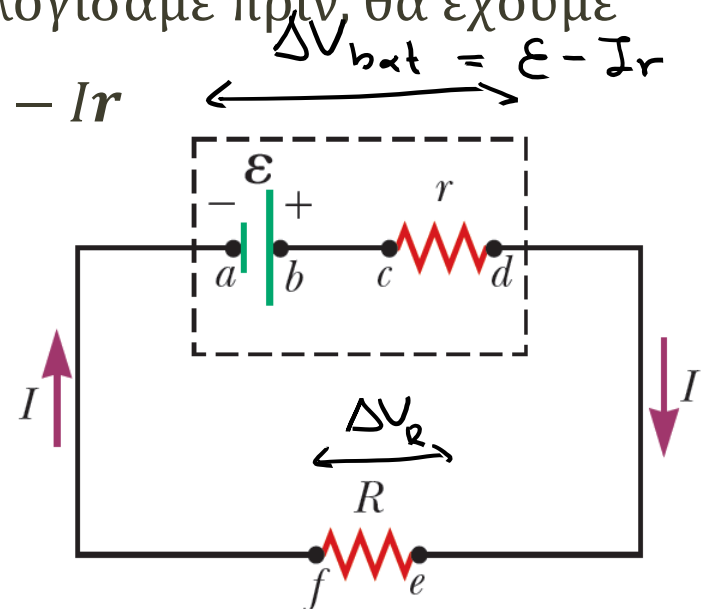
- Σύμφωνα με τη σχέση που υπολογίσαμε πριν, θα έχουμε

$$V_d - V_a = \Delta V = \varepsilon - Ir$$

οπότε από τις δυο σχέσεις

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

- Άρα το ρεύμα εξαρτάται τόσο από την R όσο κι από την r



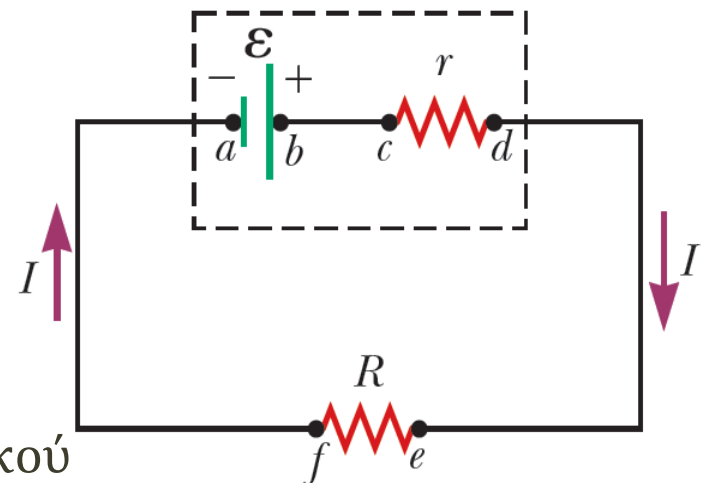


Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

$$\mathcal{E} = IR + Ir$$

- Πολλαπλασιάζοντας με I , έχουμε $I\mathcal{E} = I^2R + I^2r$
- Αυτό σημαίνει ότι η συνολική ισχύς κατανέμεται τόσο στην εξωτερική αντίσταση R όσο και στην εσωτερική αντίσταση r
- Στην πράξη, η R είναι αρκετά μεγαλύτερη από την r
 - Όσο «γερνάει» η μπαταρία τόσο μεγαλώνει η τιμή του r της
- Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μπαταρία είναι μια πηγή σταθερής ΗΕΔ
 - Όχι σταθερού ρεύματος
 - Όχι σταθερής διαφοράς δυναμικού

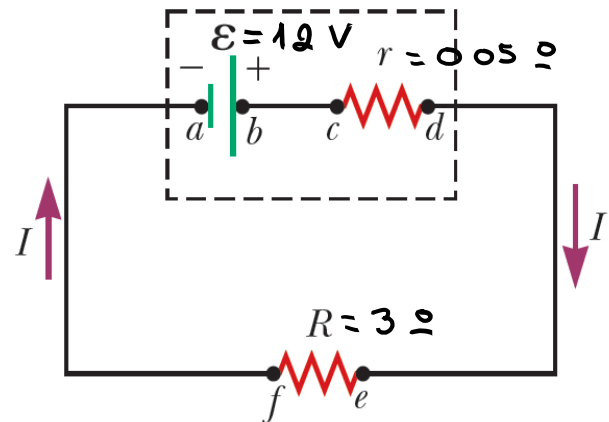




Ηλεκτρικά Κυκλώματα

◉ Παράδειγμα

- ◉ Μια μπαταρία έχει ΗΕΔ 12 V και εσωτερική αντίσταση $r = 0.05\ \Omega$. Οι πόλοι της συνδέονται σε μια εξωτερική αντίσταση με $R = 3\ \Omega$.
- ◉ Α) Βρείτε το ρεύμα και τη διαφορά δυναμικού της μπαταρίας
- ◉ Β) Υπολογίστε την ισχύ που λαμβάνει ο αντιστάτης, η εσωτερική αντίσταση και την ισχύ που δίνει η μπαταρία





Ηλεκτρικά Κυκλώματα

• Παράδειγμα – Λύση:

- Μια μπαταρία έχει ΗΕΔ 12 V και εσωτερική αντίσταση $r = 0.05 \Omega$. Οι πόλοι της συνδέονται σε μια εξωτερική αντίσταση με $R=3 \Omega$.

A) Βρείτε το ρεύμα και τη διαφορά δυναμικού της μπαταρίας

B) Υπολογίστε την ισχύ που λαμβάνει ο αντιστάτης, η εσωτερική αντίσταση και την ισχύ που δίνει η μπαταρία

A) Ζητάμε το ρεύμα $I \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{12}{3+0.05} \approx 3.9 \text{ A}$

— " — το $\Delta V_{\text{bat}} \Rightarrow \Delta V_{\text{bat}} = \mathcal{E} - Ir = 12 - 3.9 \cdot 0.05 \approx 11.8 \text{ V}$

B) $P_R = I^2 R = (3.9)^2 \cdot 3 = 46.3 \text{ W}$

$P_r = I^2 \cdot r = (3.9)^2 \cdot 0.05 = 0.772 \text{ W}$

$P_{\text{total}} = P_R + P_r = 47.1 \text{ W}$

Α $r' = 2 \Omega$

• $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r'} = 2.4 \text{ A}$

• $\Delta V_{\text{bat}} = \mathcal{E} - Ir' = 7.2 \text{ V}$

• $P_R = I^2 R = 17.3 \text{ W}$

• $P_r = I^2 r = 11.5 \text{ W}$

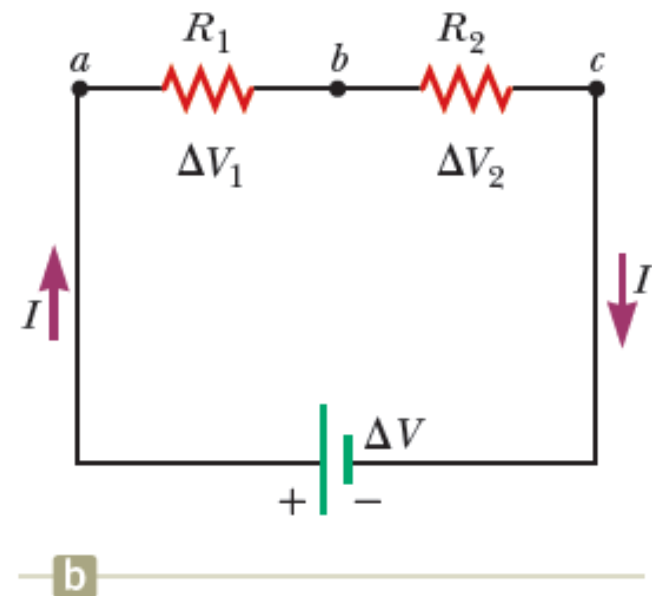
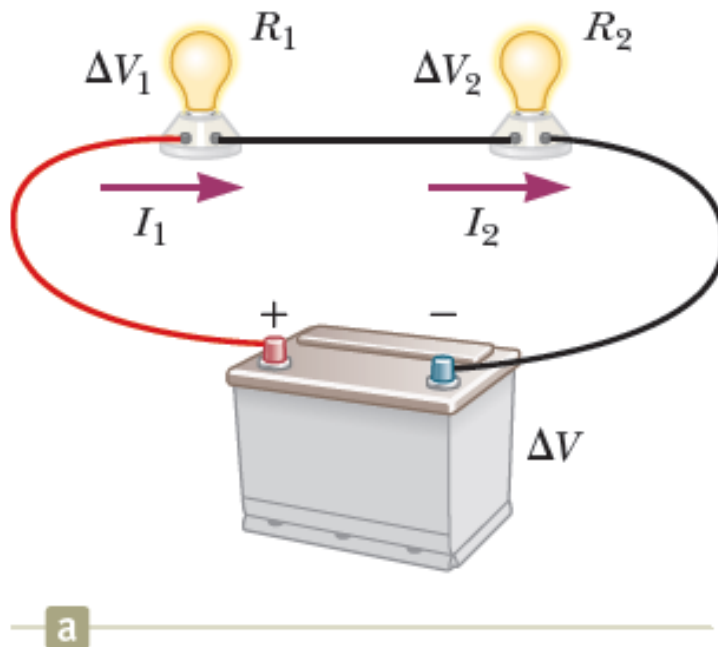
• $P_{\text{total}} = P_R + P_r = 28.8 \text{ W}$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Αντιστάτες σε σειρά & παράλληλα

- Ας δούμε αν μπορούμε να εφαρμόσουμε το ίδιο «σχέδιο» στους αντιστάτες, όπως κάναμε με τους πυκνωτές
- Ας ξεκινήσουμε με μια διάταξη σε σειρά



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

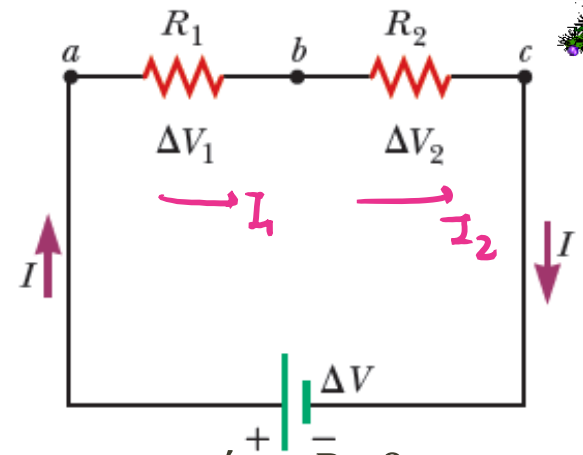
- Αντιστάτες σε σειρά

- Η διαφορά δυναμικού δίνεται ως

$$\begin{aligned}\Delta V &= \Delta V_1 + \Delta V_2 \\ &= I_1 R_1 + I_2 R_2\end{aligned}$$

- Η ποσότητα φορτίου Q που εξέρχεται του αντιστάτη R_1 θα πρέπει να είναι ίδια με αυτή που εισέρχεται στον R_2 , αφού το φορτίο στο κύκλωμα δεν αλλάζει!
- Άρα $I = I_1 = I_2$, αν I είναι το ρεύμα που άγει η μπαταρία
- Έτσι, $I_1 R_1 + I_2 R_2 = I(R_1 + R_2) = \Delta V$
- Οπότε ένας ισοδύναμος αντιστάτης θα πρέπει να έχει αντίσταση $R_{eq} = R_1 + R_2$
- Γενικότερα

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα



• Αντιστάτες σε παραλληλία

- Προφανώς, η διαφορά δυναμικού στα άκρα τους είναι η ίδια
- Άρα $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$, αν ΔV είναι η διαφορά δυναμικού που εγκαθιστά η μπαταρία

- Το ρεύμα I «χωρίζεται» σε δυο, αφού οι αντιστάσεις είναι διαφορετικές
- Επειδή όμως το συνολικό φορτίο διατηρείται

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

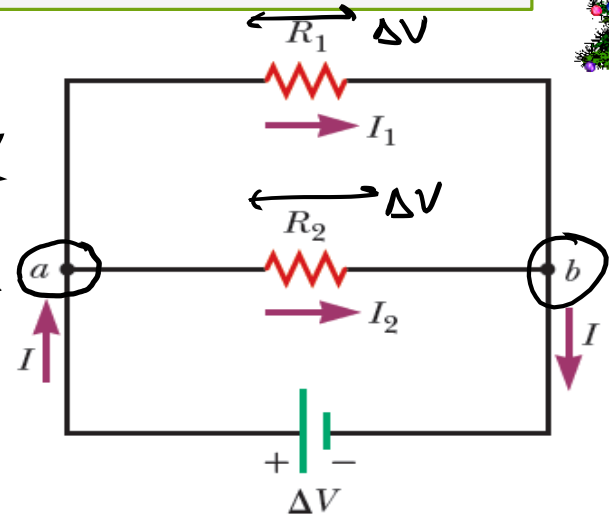
- Άρα ένας ισοδύναμος αντιστάτης θα πρέπει να έχει αντίσταση

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

- Γενικότερα

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

$$I = \frac{\Delta V}{R}$$





Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Πυκνωτές

- Σε σειρά:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

- Σε παραλληλία:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$$

Αντιστάτες

- Σε σειρά:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

- Σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Quiz:

- A) Βρείτε την ισοδύναμη αντίσταση
- B) Αν η διάταξη συνδεθεί σε μια διαφορά δυναμικού 7 V, πόση θα είναι η διαφορά δυναμικού στον πρώτο αντιστάτη, των 8 Ω?

$$B) \Delta V_{14\Omega} = IR \Rightarrow I = \frac{\Delta V_{14}}{R} = \frac{7}{14} = 0.5 \text{ A}$$

$$\Delta V_{12\Omega} = IR = 0.5 \cdot 12 = 6 \text{ V}$$

$$\Delta V_{2\Omega} = IR = 0.5 \cdot 2 = 1 \text{ V}$$

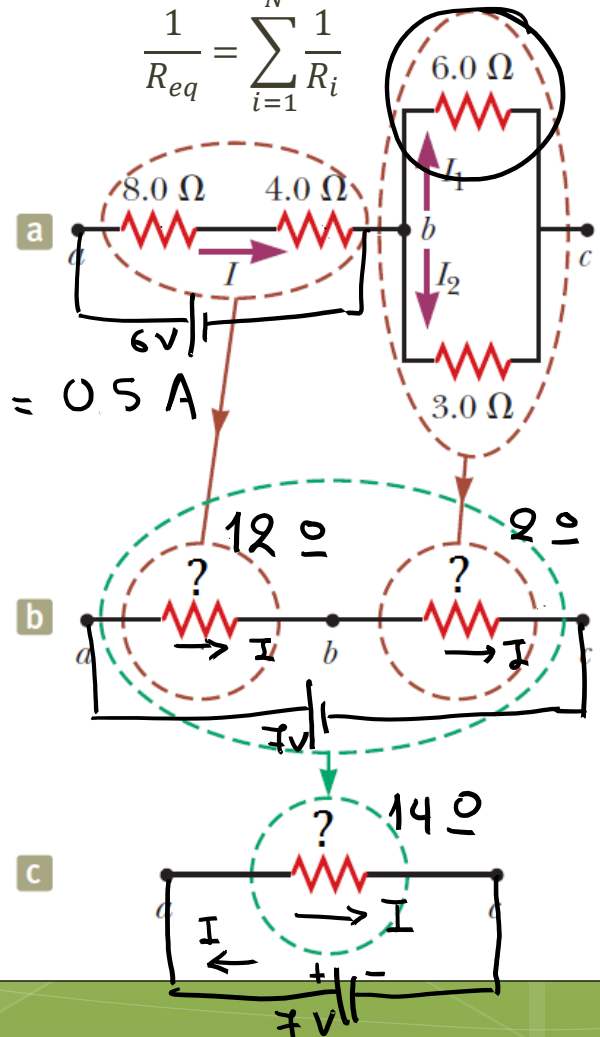
$$\Delta V_{8\Omega} = IR = 0.5 \cdot 8 = 4 \text{ V}$$

- Σε σειρά:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

- Σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$





Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Οι Κανόνες του Kirchhoff

- Για πιο περίπλοκα κυκλώματα, ακολουθούμε κάποιους κανόνες, του λεγόμενου **κανόνες του Kirchhoff**

- 1. Κανόνας κόμβου:** σε οποιονδήποτε κόμβο, το άθροισμα των ρευμάτων πρέπει να είναι μηδέν

$$\sum_{\text{κόμβος}} I = 0$$

- Τα ρεύματα που μπαίνουν στον κόμβο έχουν θετικό πρόσημο, ενώ αυτά που βγαίνουν, αρνητικό.
- Εναλλακτικά:

$$I_{in} = I_{out}$$

- 2. Κανόνας βρόχου:** το άθροισμα των διαφορών δυναμικού σε ένα βρόχο πρέπει να είναι μηδέν

$$\sum_{\text{βρόχος}} \Delta V = 0$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Οι Κανόνες του Kirchhoff

1. Κανόνας κόμβου:

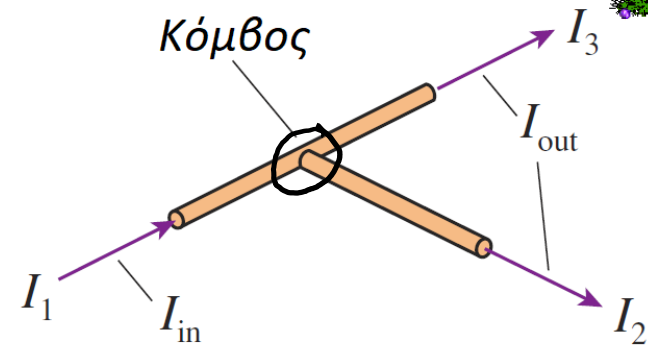
$$I_{in} = I_{out}$$

Προέρχεται από την αρχή διατήρησης του φορτίου

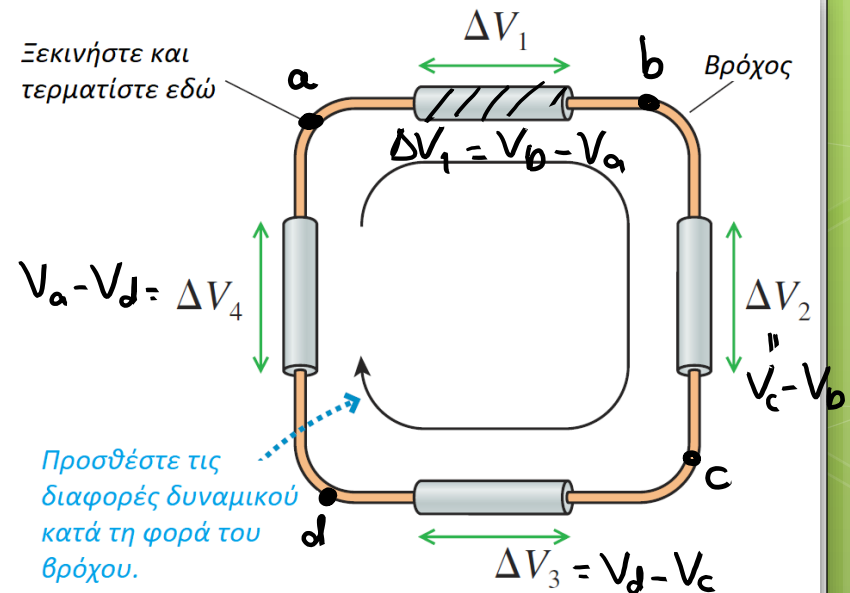
2. Κανόνας βρόχου:

$$\sum_{\text{βρόχος}} \Delta V = 0$$

Προέρχεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας



$$\text{Κανόνας κόμβου: } I_1 = I_2 + I_3$$



$$\text{Κανόνας βρόχου: } \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 = 0$$



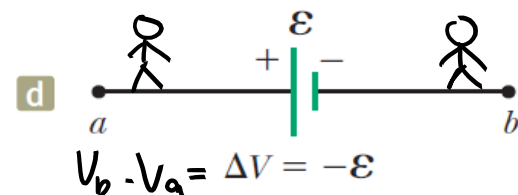
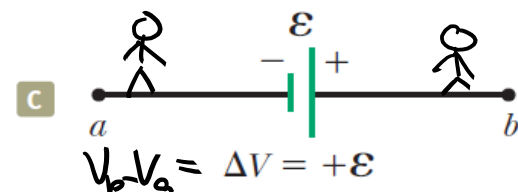
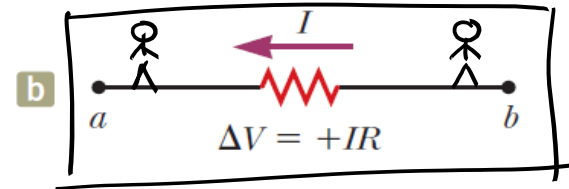
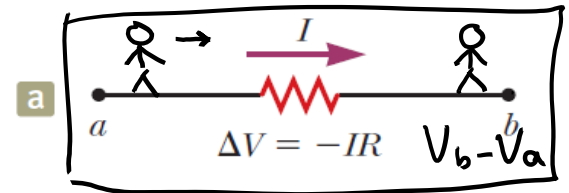
Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Κανόνες προσήμου

- a. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα αντιστάτη κατά τη φορά του ρεύματος είναι $-IR$
- b. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα αντιστάτη κατά την αντίθετη φορά του ρεύματος είναι $+IR$
- c. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ΗΕΔ είναι $+\mathcal{E}$ αν τη διατρέχουμε από τα αρνητικά προς τα θετικά
- d. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ΗΕΔ είναι $-\mathcal{E}$ αν τη διατρέχουμε από τα θετικά προς τα αρνητικά

$$\Delta V = IR$$

Σε κάθε διάγραμμα, $\Delta V = V_b - V_a$ και το στοιχείο κυκλώματος διατρέχεται από το a στο b, αριστερά προς δεξιά.



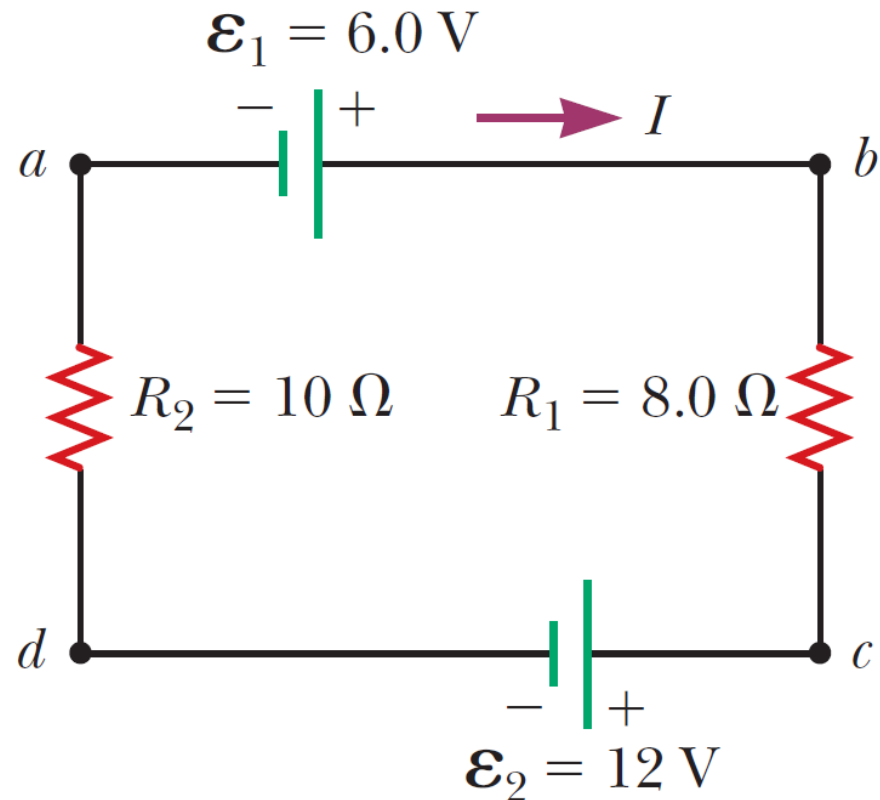


Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα:

- Ένα κύκλωμα απλού βρόχου περιέχει δυο αντιστάτες και δυο πηγές όπως στο σχήμα. Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

Επιλέγουμε ΤΥΧΑΙΑ
φύση στο ρεύμα I .



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

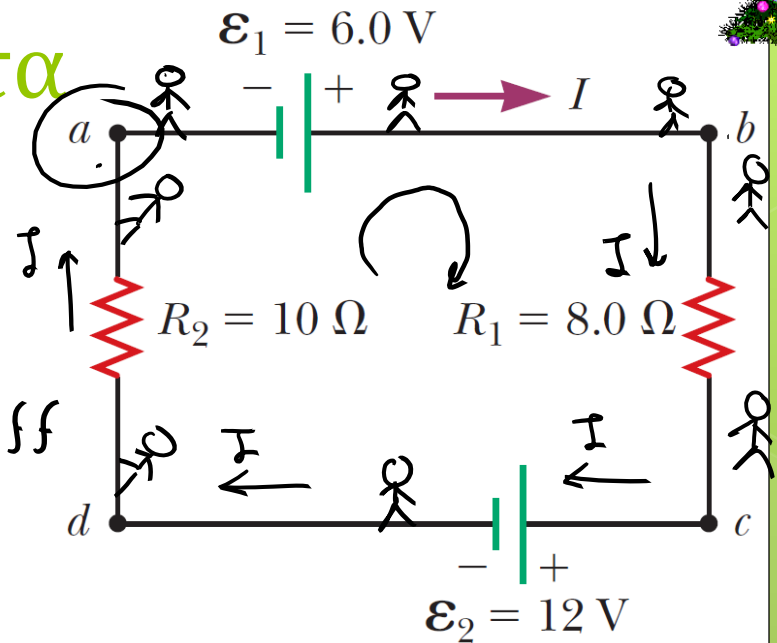
● Παράδειγμα - Λύση:

- Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

Εφαρμόζουμε το 2^ο κ. Kirchhoff
στο βρόχο: $abcd a$

$$\begin{aligned}\sum_{abcd a} \Delta V &= 0 \Leftrightarrow +\varepsilon_1 - IR_1 - \varepsilon_2 - IR_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6 - 8I - 12 - 10I = 0 \\ &\Rightarrow I = -\frac{1}{3} \text{ A} = -0.333 \text{ A}\end{aligned}$$

Το πρόσημο δηλώνει ότι το ρεύμα I έχει αντίθετη φορά από αυτή που υποθέσαμε!

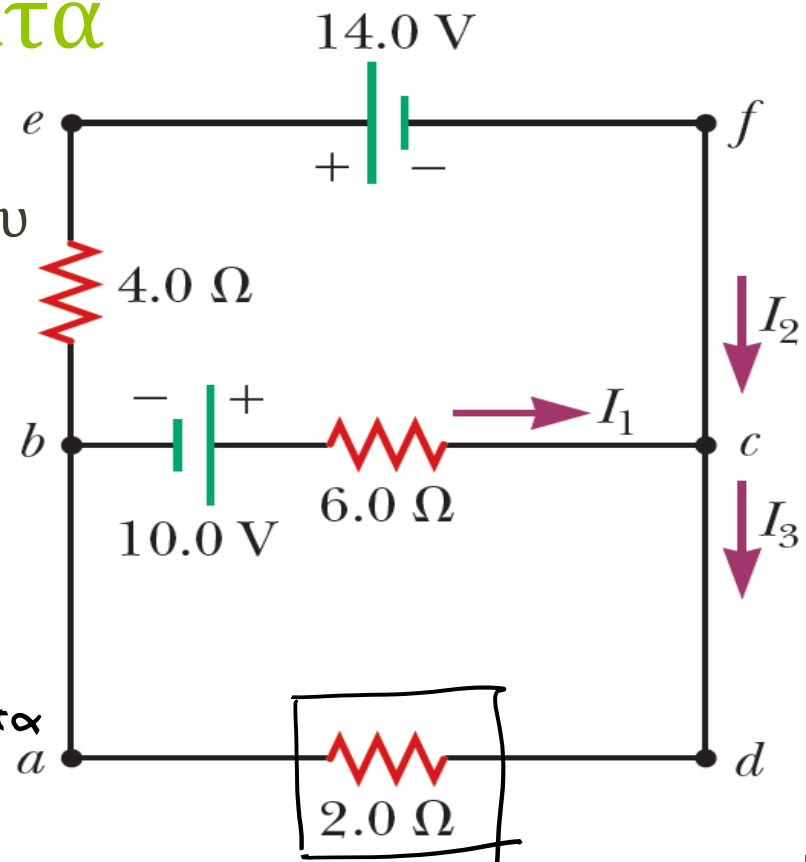


Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Παράδειγμα:

- Βρείτε τα ρεύματα I_1, I_2, I_3 του διπλανού κυκλώματος και υπολογίστε τη διαφορά δυναμικού και την ισχύ που παραδίδεται στα άκρα του αντιστάτη αντίστασης $2\ \Omega$.

Επιλέξαμε ΤΥΧΑΙΑ τα ρεύματα
σε έναν κύβο.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Παράδειγμα - Λύση:

Στον κύκλο c, 1^η καν. Kirchhoff:

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (1)$$

Στο βρόχο abcda, 2^η καν. Kirchhoff:

$$\sum_{\text{abcda}} \Delta V = 0 \Leftrightarrow +E_1 - I_1 R_1 - I_3 R_2 = 0$$

$$10 - 6I_1 - 2I_3 = 0 \quad (2)$$

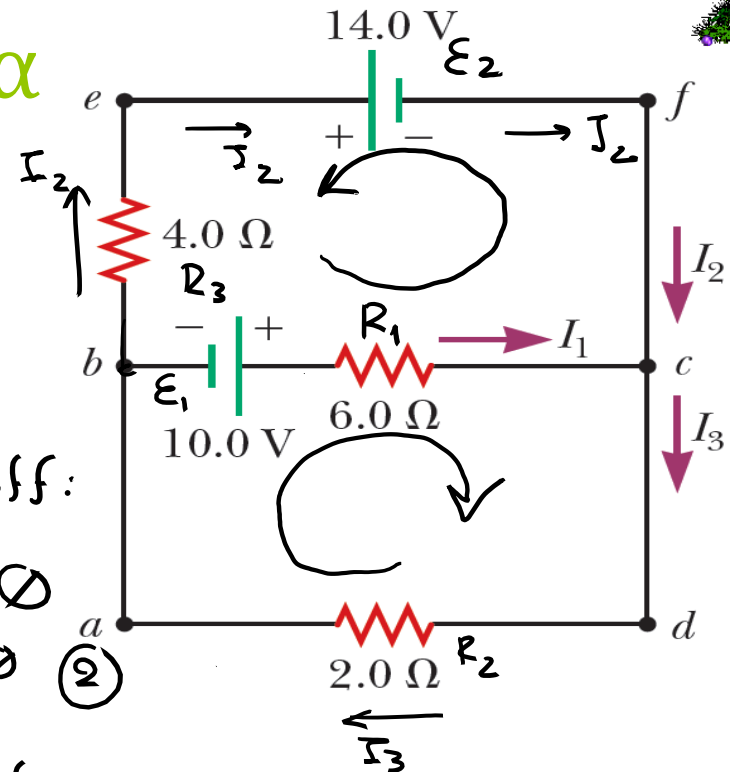
Στο βρόχο bcfcb, 2^η καν. Kirchhoff:

$$\sum_{\text{bcfeb}} \Delta V = 0 \Leftrightarrow +E_1 - I_1 R_1 + E_2 + I_2 R_3 = 0$$

$$10 - 6I_1 + 14 + 4I_2 = 0 \quad (3)$$

Λύνοντας, έχουμε $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = -3 \text{ A}$, $I_3 = -1 \text{ A}$

(Τα αρνητικά
πρόσημα δηλώνουν
αντίθετη φορά
ρεύματος)



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

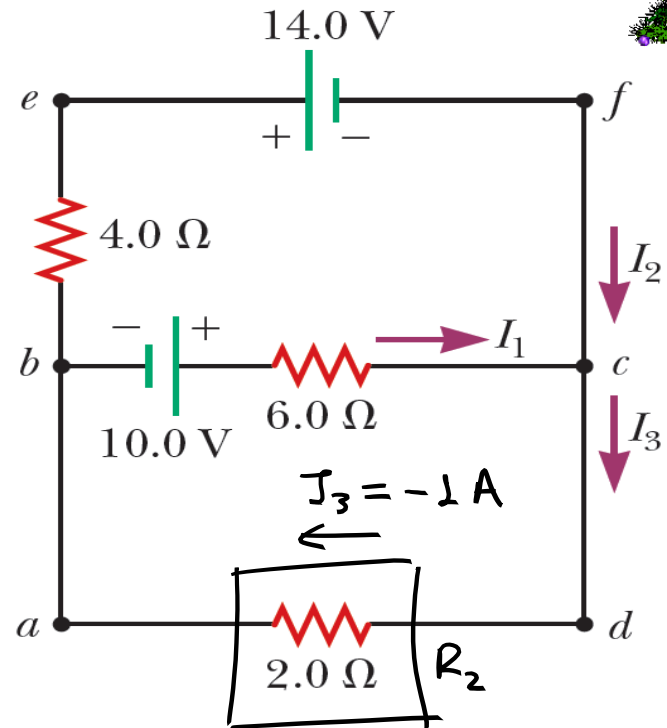
Παράδειγμα - Λύση:

Λύση

$$\Delta V_{R_2} = I_3 R_2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ Volt}$$

$$P_{R_2} = I_3^2 R_2 = 1^2 \cdot 2 = 2 \text{ Watt}$$

Εξάσκηση: Βρείτε όλα τα ΔV_{R_i} , P_{R_i} για κάθε αντιστάτη.





Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Κυκλώματα RC

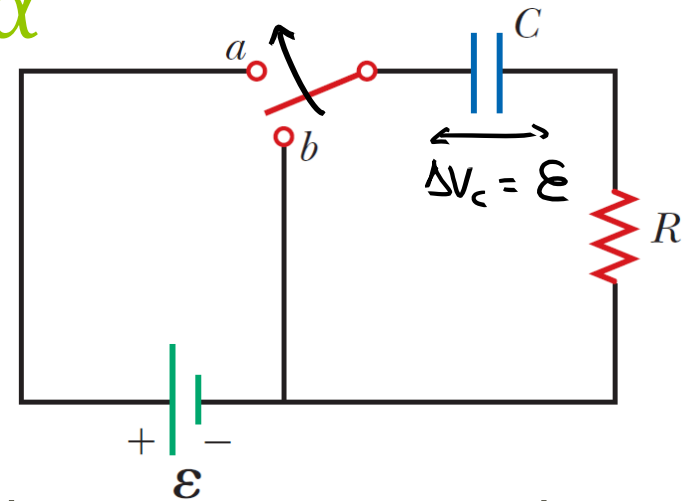
- Ως τώρα αναλύσαμε κυκλώματα όπου το ρεύμα είναι σταθερό.
- Αν όμως αρχίσουμε να χρησιμοποιούμε πυκνωτές στα κυκλώματά μας, το ρεύμα εξακολουθεί να έχει την ίδια κατεύθυνση αλλά το μέτρο του μπορεί να αλλάζει σε διαφορετικές χρονικές στιγμές
- Ένα κύκλωμα που αποτελείται από συνδυασμούς αντιστάσεων και πυκνωτών ονομάζεται **RC-κύκλωμα**

Ηλεκτρικά Κυκλώματα



Φόρτιση πυκνωτή

- Ας θεωρήσουμε ένα απλό RC κύκλωμα με αφόρτιστο αρχικά πυκνωτή
- Όταν ο διακόπτης κλείσει τη χρονική στιγμή $t = 0$, (θέση α) ξεκινά να υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα, κι ο πυκνωτής ξεκινά να φορτίζεται
- Όσο φορτίζεται, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αυξάνεται
- Όταν επιτευχθεί το μέγιστο φορτίο, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα μηδενίζεται! Γιατί;
 - Γιατί δεν υπάρχει πια διαφορά δυναμικού στο κύκλωμα!
 - Ο πυκνωτής έχει $\Delta V_C = \mathcal{E}$!



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Φόρτιση πυκνωτή

- Ας αναλύσουμε τη διαδικασία ποσοτικά
- Σύμφωνα με το 2^ο κανόνα του Kirchhoff:

$$\sum \Delta V = 0 \Leftrightarrow \Delta V_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma} + \Delta V_C + \Delta V_R = 0 \Leftrightarrow \varepsilon - \frac{q}{C} - iR = 0$$

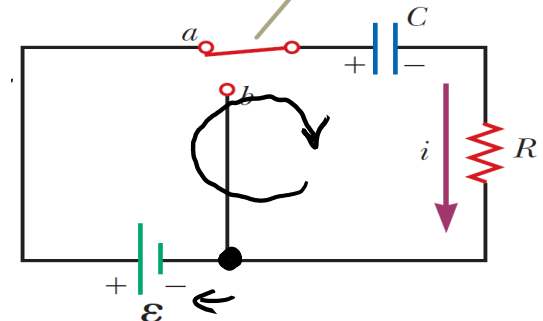
με i, q το ρεύμα και το φορτίο του πυκνωτή μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t > 0$, $q(t)$, $i(t)$

- Αποτελούν δηλαδή **στιγμιαίες** τιμές
- Αρχικά, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι

$$I_{init} = \frac{\varepsilon}{R}, \quad t = 0$$

- ...γιατί το φορτίο του πυκνωτή είναι αρχικά μηδέν
- Τότε, η διαφορά δυναμικού της μπαταρίας εμφανίζεται εξ ολοκλήρου στα άκρα της αντίστασης

Όταν ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση α, ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται.





Ηλεκτρικά Κυκλώματα

◉ Φόρτιση πυκνωτή

- ◉ Στο τέλος, όταν ο πυκνωτής είναι φορτισμένος στη μέγιστη τιμή του, τα φορτία παύουν να κινούνται και το ρεύμα στο κύκλωμα είναι μηδέν
 - ◉ Τότε, η διαφορά δυναμικού της μπαταρίας εμφανίζεται εξ ολοκλήρου στα άκρα του πυκνωτή
 - ◉ Το φορτίο του πυκνωτή είναι

$$Q = C\Delta V = C\varepsilon$$

- ◉ Θα ήταν επιθυμητό να γνωρίζουμε αναλυτικά τις τιμές του φορτίου και του ρεύματος για κάθε χρονική στιγμή t , και όχι μόνο τι συμβαίνει στις δυο ακραίες καταστάσεις που περιγράψαμε
 - ◉ Ας το δούμε...



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Φόρτιση πυκνωτή

- Ξέρουμε ότι $i = \frac{dq}{dt}$ και άρα

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - iR = 0 \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{q - C\varepsilon}{RC}$$

- Πολλαπλασιάζοντας με dt και αναδιατάσσοντας

$$\frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC} dt$$

- Ολοκληρώνοντας

$$\int_0^{\hat{q}} \frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC} \int_0^{\hat{t}} dt \Leftrightarrow \log\left(\frac{\hat{q} - C\varepsilon}{-C\varepsilon}\right) = -\frac{\hat{t}}{RC}$$

- Άρα

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) = Q(1 - e^{-t/RC})$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Φόρτιση πυκνωτή

- Παραγωγίζοντας τη σχέση

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) = Q(1 - e^{-t/RC})$$

ως προς το χρόνο έχουμε ότι

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

- Η ποσότητα RC ονομάζεται **χρονική σταθερά τ**

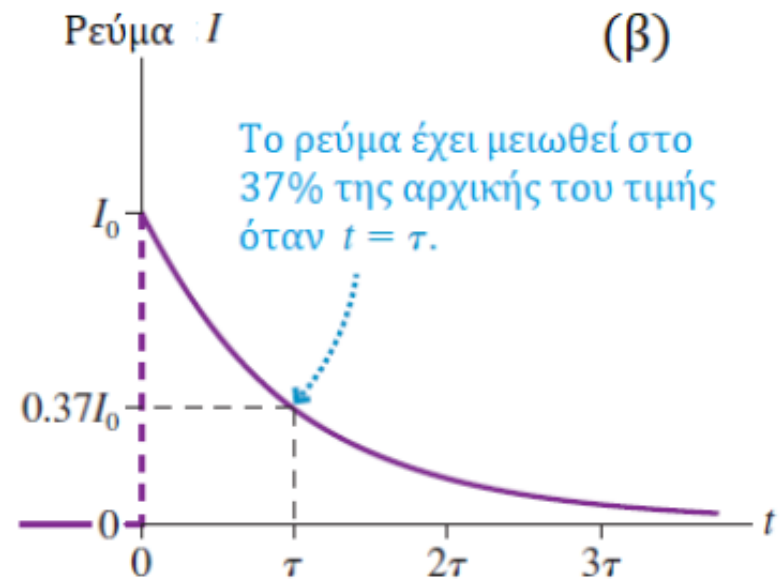
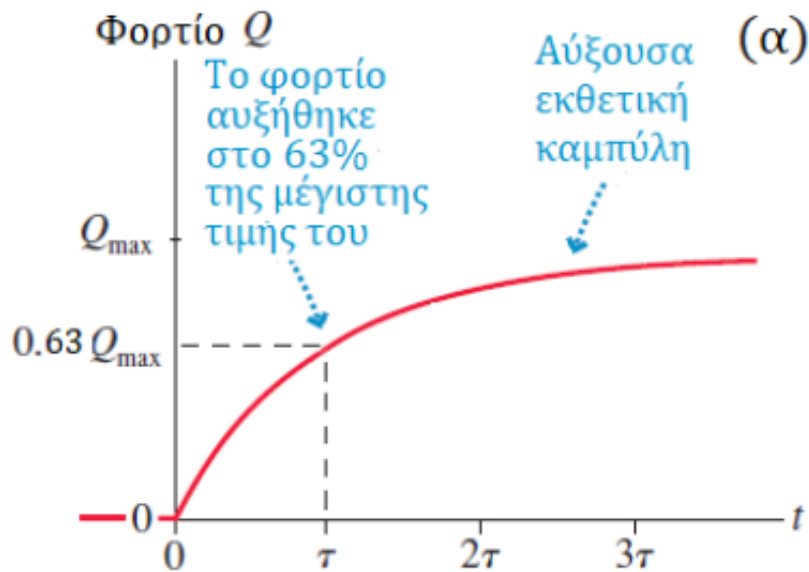
$$\tau = RC$$

- Εκφράζει τη χρονική στιγμή όπου το ρεύμα φθίνει στο $1/e$ της αρχική του τιμής ($0.368I_i$),
- Αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή όπου το φορτίο αυξάνει από $q = 0$ στην τιμή $q = 0.632C\varepsilon$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Φόρτιση πυκνωτή



Ηλεκτρικά Κυκλώματα



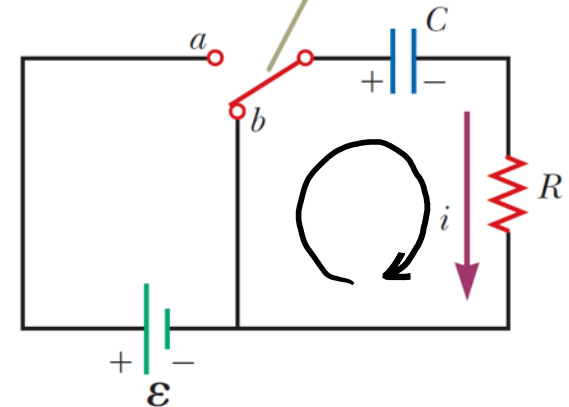
● Εκφόρτιση πυκνωτή

- Έστω ότι ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με κάποιο φορτίο Q_i
- Στα άκρα του θα έχει μια διαφορά δυναμικού

$$\Delta V_C = Q_i / C$$

- Ο αντιστάτης έχει μηδενική διαφορά δυναμικού, αφού δεν υπάρχει πλέον ροή ρεύματος
- Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$, κλείσουμε το διακόπτη στη θέση b, τότε ο πυκνωτής θα εκφορτιστεί μέσω του αντιστάτη
- Έστω μια χρονική στιγμή t
 - Ο πυκνωτής θα έχει φορτίο q
 - Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι i

Όταν ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση b, ο πυκνωτής εκφορτίζεται.



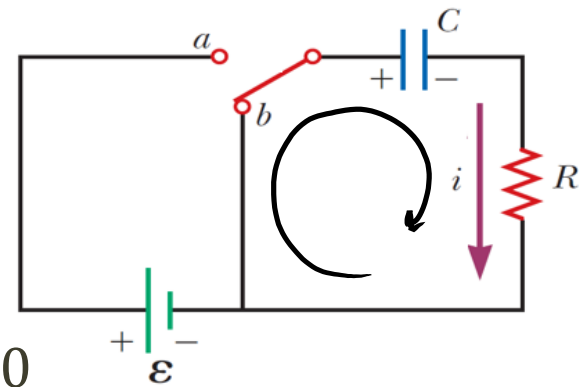
Ηλεκτρικά Κυκλώματα



- Εκφόρτιση πυκνωτή

- Από το 2^ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα, έχουμε

$$\Delta V_{\text{πυκν}} + \Delta V_R = 0 \Leftrightarrow -\frac{q}{C} - iR = 0$$



- Ξανά, θέτοντας $i = \frac{dq}{dt}$, έχουμε

$$-R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \Leftrightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

- Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\int_{Q_i}^{\hat{q}} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^{\hat{t}} dt \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\hat{q}}{Q_i}\right) = -\frac{\hat{t}}{RC}$$

- Άρα

$$q(t) = Q_i e^{-t/RC}$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Εκφόρτιση πυκνωτή
 - Παραγωγίζοντας τη σχέση

$$q(t) = Q_i e^{-t/RC}$$

ως προς το χρόνο, έχουμε

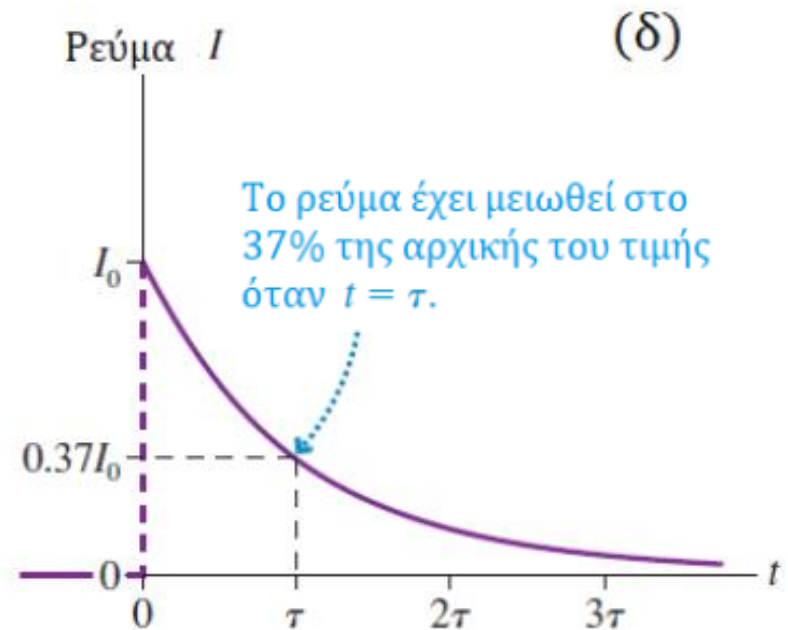
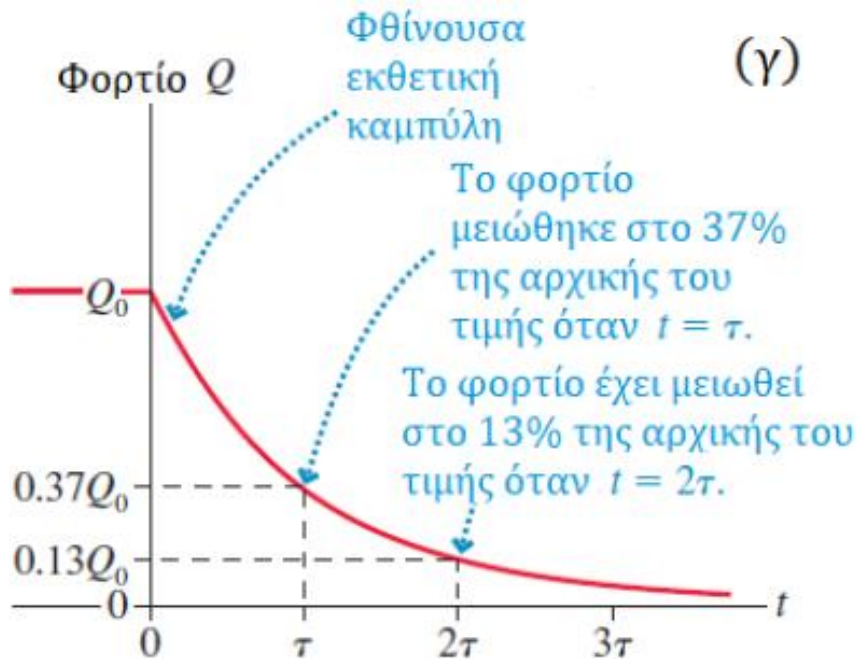
$$i(t) = -\frac{Q_i}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -I_i e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Το παραπάνω αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το ρεύμα έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή που είχε όταν ο πυκνωτής φορτιζόταν



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Εκφόρτιση πυκνωτή





Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Φόρτιση πυκνωτή

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = Q(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Εκφόρτιση πυκνωτή

$$q(t) = Q_i e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\frac{Q_i}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -I_i e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Όλα τα παραπάνω ορίζονται για $t > 0$

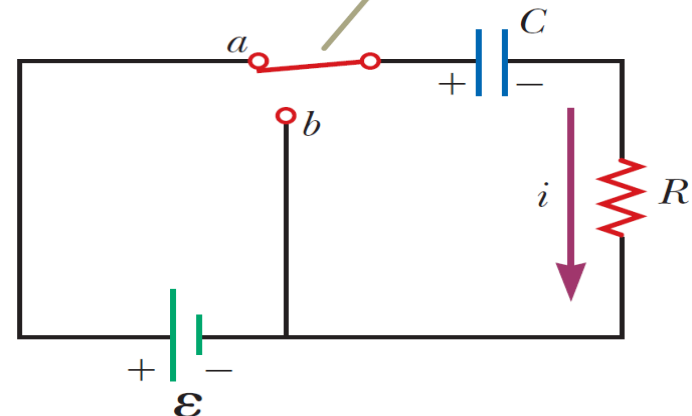


Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα:

- Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως δείξαμε πριν, με τιμές $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $C = 5 \mu\text{F}$, και $R = 8 \times 10^5 \Omega$. Ο διακόπτης γυρίζει στη θέση α. Βρείτε τη χρονική σταθερά τ , το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή, το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα και τις συναρτήσεις ρεύματος και φορτίου.

Όταν ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση α, ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται.





Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά με τιμές $\varepsilon = 12 \text{ V}$, $C = 5 \mu\text{F}$, και $R = 8 \times 10^5 \Omega$. Ο διακόπτης γυρίζει στη θέση α. Βρείτε τη χρονική σταθερά τ , το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή, το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα και τις συναρτήσεις ρεύματος και φορτίου.

$$\text{Είναι: } \tau = RC = 8 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 40 \cdot 10^{-1} = 4 \text{ sec}$$

$$Q_{\max} = C\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 60 \cdot 10^{-6} = 60 \mu\text{C}$$

$$I_{\max} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{12}{8 \cdot 10^5} = 15 \mu\text{A}$$

$$\text{Είναι: } q(t) = Q_{\max} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = (60 \cdot 10^{-6}) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right)$$

$$i(t) = I_{\max} e^{-\frac{t}{\tau}} = (15 \cdot 10^{-6}) e^{-\frac{t}{4}}$$

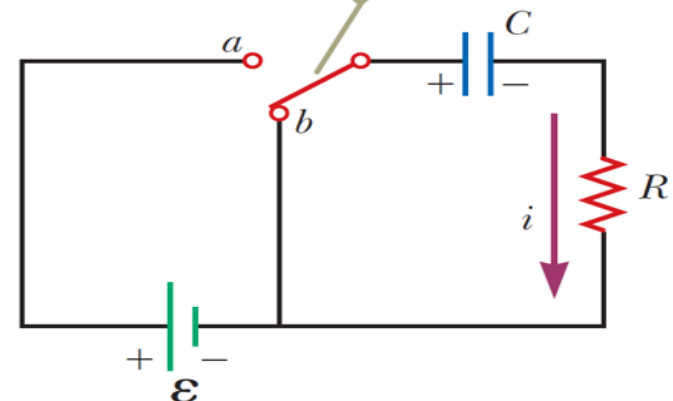
Ηλεκτρικά Κυκλώματα



◉ Παράδειγμα:

- ◉ Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R , όπως είδαμε νωρίτερα.
 - A) Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται το φορτίο του πυκνωτή ίσο με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής του τιμής;
 - B) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή φθίνει με το χρόνο όσο ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται η ενέργεια του πυκνωτή ίση με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής της τιμής;

Όταν ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση b, ο πυκνωτής εκφορτίζεται.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα



$$\left\{ \begin{array}{l} \log \rightarrow \ln \\ \checkmark \end{array} \right.$$

● Παράδειγμα – Λύση:

- Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R , όπως είδαμε νωρίτερα.

A) Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται το φορτίο του πυκνωτή ίσο με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής του τιμής;

Γνωρίζουμε ότι $q(t) = Q_0 e^{-t/RC} = Q_0 e^{-t/\tau}$, $\tau = RC$

Ζητάμε το χρόνο t σε χρονικές σταθερές τ για τα οποία:

$$q(t) = \frac{1}{4} Q_0$$

Άρα

$$Q_0 e^{-t/\tau} = \frac{1}{4} Q_0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \log e^{-\frac{t}{\tau}} = \log \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} \log e = \cancel{\log 1} - \log 4 \Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} = -\log 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \tau \cdot \log 4$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα – Λύση:

- Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R , όπως είδαμε νωρίτερα.

B) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή φθίνει με το χρόνο όσο ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται η ενέργεια του πυκνωτή ίση με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής της τιμής;

$$\text{Ξέρουμε ότι } U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \Rightarrow U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2(t)}{C} = U_E(t)$$

Ζητάμε το t όταν

$$U_E(t) = \frac{1}{4} U_{\text{αρχ}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_i^2}{C} \right)$$

$$\text{Άρα } Q(t) = Q_i e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ οπότε } \cancel{\frac{1}{2}} \frac{\cancel{Q_i^2}}{\cancel{C}} e^{-\frac{2t}{\tau}} = \frac{1}{4} \left(\cancel{\frac{1}{2}} \frac{\cancel{Q_i^2}}{\cancel{C}} \right)$$

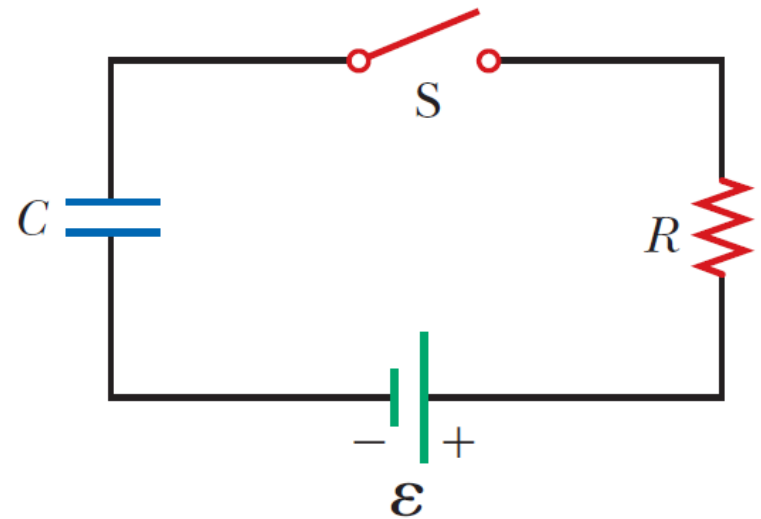
$$\Leftrightarrow e^{-\frac{2t}{\tau}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \tau \log 4$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα



◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως δείξαμε πριν, με τιμές $\mathcal{E} = 30 \text{ V}$, $C = 5 \mu\text{F}$, και $R = 1 \times 10^6 \Omega$. Βρείτε το ρεύμα στον αντιστάτη 10 δευτερόλεπτα μετά το κλείσιμο του διακόπτη.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα



● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως δείξαμε πριν, με τιμές $\mathcal{E} = 30 \text{ V}$, $C = 5 \mu\text{F}$, και $R = 1 \times 10^6 \Omega$. Βρείτε το ρεύμα στον αντιστάτη 10 δευτερόλεπτα μετά το κλείσιμο του διακόπτη.

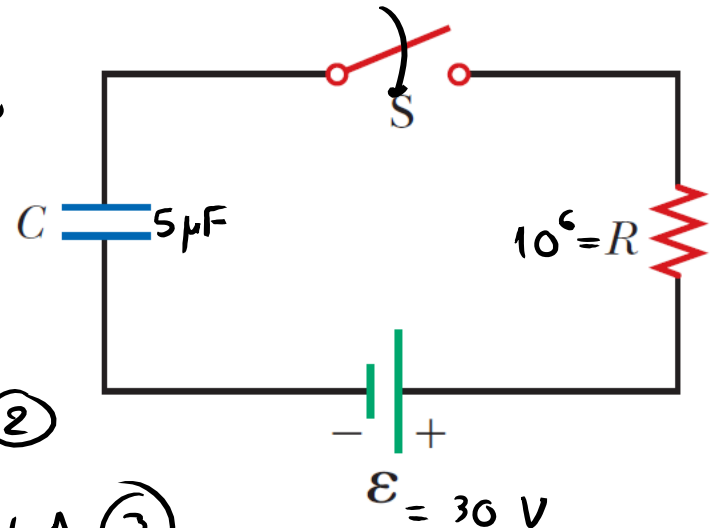
Ο πυκνωτής φορτίζεται. Το ρεύμα στο κύκλωμα δίνεται:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad RC = \tau \quad (1)$$

$$\text{Είναι } RC = 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 5 \text{ sec} = \tau \quad (2)$$

$$\text{--||--} \quad \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{30}{10^6} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ A} = 30 \mu\text{A} \quad (3)$$

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad i(t) = (30 \mu\text{A}) \cdot e^{-\frac{t}{5}}, \quad \text{για } t = 10 \text{ sec}, \quad i(10) = (30 \mu\text{A}) e^{-2} \approx 4 \mu\text{A}$$





2021

HAPPY NEW YEAR

Τέλος Διάλεξης